

# 財團法人大學入學考試中心基金會

## 111學年度學科能力測驗試題

### 數學A考科

#### —作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 18-2 列的  $\frac{\square}{8}$  劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的  $\frac{-}{\square}$  與第 19-2 列的  $\frac{\square}{7}$  劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題5分。

1. 某冰淇淋店最少需準備  $n$  桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從  $n$  桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？

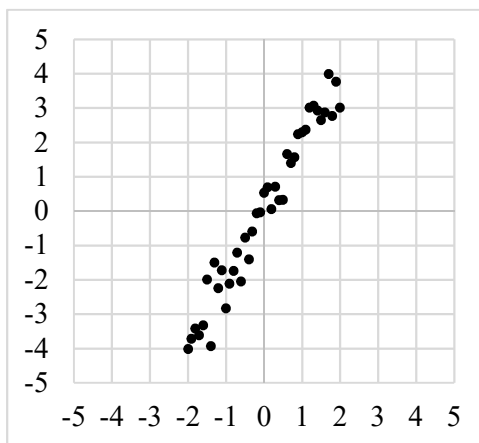
- (1) 101                      (2) 105                      (3) 115                      (4) 120                      (5) 225

2. 某品牌計算機在計算對數  $\log_a b$  時需按  $\boxed{\log} \boxed{[} \boxed{a} \boxed{,} \boxed{b} \boxed{]}$ 。某生在計算  $\log_a b$  時（其中  $a > 1$  且  $b > 1$ ）順序弄錯，誤按  $\boxed{\log} \boxed{[} \boxed{b} \boxed{,} \boxed{a} \boxed{]}$ ，所得為正確值的  $\frac{9}{4}$  倍。試選出  $a, b$  間的關係式。

- (1)  $a^2 = b^3$                       (2)  $a^3 = b^2$                       (3)  $a^4 = b^9$                       (4)  $2a = 3b$                       (5)  $3a = 2b$

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。下圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？

- (1)  $y = 2x$   
(2)  $y = -2x$   
(3)  $y = -x$   
(4)  $y = \frac{x}{2}$   
(5)  $y = -\frac{x}{2}$



4. 設等差數列  $\langle a_n \rangle$  之首項  $a_1$  與公差  $d$  皆為正數，且  $\log a_1, \log a_3, \log a_6$  依序也成等差數列。試選出數列  $\log a_1, \log a_3, \log a_6$  的公差。

- (1)  $\log d$                       (2)  $\log \frac{2}{3}$                       (3)  $\log \frac{3}{2}$                       (4)  $\log 2d$                       (5)  $\log 3d$

5. 已知某地區有 30%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率則為 60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為  $P$ ；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為  $P'$ 。試問  $\frac{P}{P'}$  最接近哪一選項？

- (1) 7                      (2) 8                      (3) 9                      (4) 10                      (5) 11

6. 設坐標平面上兩直線  $L_1, L_2$  的斜率皆為正，且  $L_1, L_2$  有一夾角的平分線斜率為  $\frac{11}{9}$ 。另一直線  $L$  通過點  $(2, \frac{1}{3})$  且與  $L_1, L_2$  所圍的有界區域為正三角形，試問  $L$  的方程式為下列哪一選項？

- (1)  $11x - 9y = 19$                       (2)  $9x + 11y = 25$                       (3)  $11x + 9y = 25$   
(4)  $27x - 33y = 43$                       (5)  $27x + 33y = 65$

## 二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 設整數  $n$  滿足  $|5n - 21| \geq 7|n|$ 。試選出正確的選項。

- (1)  $|5n - 7n| \geq 21$                       (2)  $-1 \leq \frac{7n}{5n - 21} \leq 1$                       (3)  $7n \leq 5n - 21$   
(4)  $(5n - 21)^2 \geq 49n^2$                       (5) 滿足題設不等式的整數  $n$  有無窮多個

8. 坐標平面上， $\triangle ABC$  三頂點的坐標分別為  $A(0,2), B(1,0), C(4,1)$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $\triangle ABC$  的三邊中， $\overline{AC}$  最長  
(2)  $\sin A < \sin C$   
(3)  $\triangle ABC$  為銳角三角形  
(4)  $\sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10}$   
(5)  $\triangle ABC$  的外接圓半徑比 2 小

9. 已知  $P$  為  $\triangle ABC$  內一點，且  $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ，其中  $a, b$  為相異實數。設  $Q, R$  在同一平面上，且  $\overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AR} = a\overrightarrow{AB} + (b - 0.05)\overrightarrow{AC}$ 。試選出正確的選項。

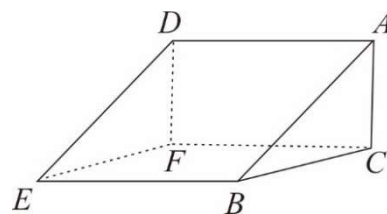
- (1)  $Q, R$  也都在  $\triangle ABC$  內部
- (2)  $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$
- (3)  $\triangle ABP$  面積 =  $\triangle ACQ$  面積
- (4)  $\triangle BCP$  面積 =  $\triangle BCQ$  面積
- (5)  $\triangle ABP$  面積 >  $\triangle ABR$  面積

10. 給定一實係數三次多項式函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ 。令  $g(x) = f(-x) - 3$ ，已知  $y = g(x)$  圖形的對稱中心為  $(1, 0)$  且  $g(-1) < 0$ 。試選出正確的選項。

- (1)  $g(x) = 0$  有三相異整數根
- (2)  $a < 0$
- (3)  $y = f(x)$  圖形的對稱中心為  $(-1, -3)$
- (4)  $f(100) < 0$
- (5)  $y = f(x)$  的圖形在點  $(-1, f(-1))$  附近會近似於一條斜率為  $a$  的直線

11. 下圖為一個積木的示意圖，其中  $ABC$  為一直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，且  $ADEB$  與  $ADFC$  皆為矩形。試選出正確的選項。

- (1) 將此積木沿平面  $ACE$  切下，可切得兩個四面體
- (2) 平面  $ADEB$  與  $ADFC$  所夾銳角大於  $45^\circ$
- (3)  $\angle CEB < \angle AEB$
- (4)  $\tan \angle AEC < \sin \angle CEB$
- (5)  $\angle CEB < \angle AEC$



12. 設  $f(x), g(x)$  皆為實係數多項式，其中  $g(x)$  是首項係數為正的二次式。已知  $(g(x))^2$  除以  $f(x)$  的餘式為  $g(x)$ ，且  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸無交點。試選出不可能是  $y = g(x)$  圖形頂點的  $y$  坐標之選項。

- (1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (2) 1      (3)  $\sqrt{2}$       (4) 2      (5)  $\pi$

### 三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用 1500 枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則

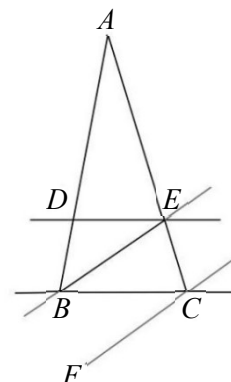
某生抽到金卡張數的期望值為  $\frac{\textcircled{13-1} \cdot \textcircled{13-2}}{\quad}$  張。

14. 已知  $a, b$  為實數，且方程組 
$$\begin{cases} ax + 5y + 12z = 4 \\ x + ay + \frac{8}{3}z = 7 \\ 3x + 8y + az = 1 \end{cases}$$
 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高

斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array} \right]$ 。則  $a = \frac{\textcircled{14-1}}{\quad}$ ， $b = \frac{\textcircled{14-2}}{\textcircled{14-3}}$ 。

（化為最簡分數）

15. 如圖，王家有塊三角形土地  $\triangle ABC$ ，其中  $\overline{BC} = 16$  公尺。政府擬徵收其中梯形  $DBCE$  部分，開闢以直線  $DE, BC$  為邊線的馬路，其路寬為  $h$  公尺，這讓王家土地只剩原有面積的  $\frac{9}{16}$ 。經協商，改以開闢平行直線  $BE, FC$  為邊線的馬路，且路寬不變，其中  $\angle EBC = 30^\circ$ ，則只需徵收  $\triangle BCE$  區域。依此協商，王家剩餘的土地  $\triangle ABE$  有 (15-1) (15-2) (15-3) 平方公尺。



16. 坐標空間中，平面  $x - y + 2z = 3$  上有兩相異直線  $L: \frac{x}{2} - 1 = y + 1 = -2z$  與  $L'$ 。

已知  $L$  也在另一平面  $E$  上，且  $L'$  在  $E$  的投影與  $L$  重合。

則  $E$  的方程式為  $x + \underline{(16-1) (16-2)} y + \underline{(16-3) (16-4)} z = \underline{(16-5)}$ 。

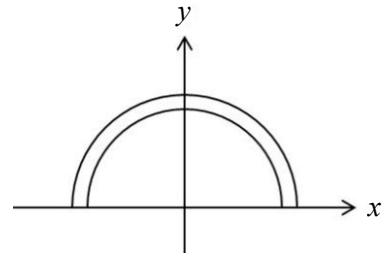
17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為  $(-1, 2, 1), (-4, 1, 3), (2, 0, -3)$ ，另一面之一頂點在  $xy$  平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為 (17-1) (17-2)。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓  $x^2 + y^2 = 3$  的外部與圓  $x^2 + y^2 = 4$  的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之  $x$  軸上方的某區域  $R$ 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓  $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 、 $C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$  上移動。開始時掃描棒黑端在點  $A(\sqrt{3}, 0)$ ，白端在  $C_2$  的點  $B$ 。接著黑、白兩端各沿著  $C_1$ 、 $C_2$  逆時針移動，直至白端碰到  $C_2$  的點  $B'(-2, 0)$  便停止掃描。



18. 試問點  $B$  的坐標為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1) (0,2)      (2)  $(1, \sqrt{3})$       (3)  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$       (4)  $(\sqrt{3}, 1)$       (5) (2,0)

19. 令  $O$  為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為  $A', B'$ 。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域  $R$ ；並於求解區內求  $\cos \angle OA'B'$  及點  $A'$  的極坐標。

（非選擇題，6 分）

20.（承 19 題）令  $\Omega$  表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求  $\Omega$  與  $R$  的面積。

（非選擇題，6 分）

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\text{迴歸直線 (最適合直線) 方程式 } y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ,  $\sqrt{5} \approx 2.236$ ,  $\sqrt{6} \approx 2.449$ ,  $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ,  $\log 3 \approx 0.4771$ ,  $\log 5 \approx 0.6990$ ,  $\log 7 \approx 0.8451$